第九页第8题：(1)设$a>1$, x为有理数。证明

$$a^x=\sup\{a^r \mid r\in\mathbf{Q}, r<x\}.$$

证明:

(1)首先, 注意到 x是个固定的有理数, 而 $a>1$。对于任意有理数 $r<x$，根据有理数指数的性质, 我们有 $a^r<a^x$。换句话说, a^x 是数集 $\{a^r \mid r\in\mathbf{Q}, r<x\}$的一个上界。

为了要证明 a^x 是这个数集的上确界，我们只要证明 a^x是它最小的上界。为此，我们只要证明，这个数集的任何上界 α, 都必定满足

$$a^x\le\alpha.$$

试试从第六页上的定义2的第(ii)条出发,来得到上面的结论.

也就是说,我们要证, 随便什么实数 α, 如果对任意有理数 $r<x$都满足 $a^r\le\alpha$. 那么它也必定满足 $a^x\le\alpha$。

为此,我们只要证明, 如果有实数 α, 对任意有理数 $r<x$都满足 $a^r\le\alpha$. 那么对任何$\epsilon>0$, 都必定有 $a^x<\alpha+\epsilon$. 首先,这样的 α 显然是正数。

对 $a>1$ 和正整数 n, 我们要利用不等式

$$a^{\frac{1}{n}}<1+\frac{a-1}{n}.$$

注意到因为 x是个固定的有理数, 所以对于任何正整数 n, $x-\frac{1}{n}$ 是个有理数,而且 $x-\frac{1}{n}<x$.因此我们有 $a^{x-\frac{1}{n}}\le\alpha$. 利用前面提到的不等式, 我们有

$$a^x=a^{x-\frac{1}{n}}\cdot a^{\frac{1}{n}}<\alpha(1+\frac{a-1}{n})=\alpha+\frac{\alpha(a-1)}{n}$$

对于任何正整数 n都成立。

现在,对于任何 $\epsilon>0$, 如果要证明 $a^x<\alpha+\epsilon$, 我们只需要找一个特殊的正整数 n, 使得 $\frac{\alpha(a-1)}{n}<\epsilon$ 成立, 那么从上面的不等式立刻就能证得所要的结论。因为 α，$a-1$都是固定的正数, 这样的正整数 n肯定是能够取到的。比如可以取 n为 $[\frac{\alpha(a-1)}{\epsilon}]+100$.

证完了.

(2)设$0<a<1$, x为有理数。证明

$$a^x=\inf\{a^r \mid r\in\mathbf{Q}, r<x\}.$$

证明类同。留给同学们。